



TITLE:

# 乱流場の確率密度関数と構造(流体力学におけるトポロジーの問題)

AUTHOR(S):

後藤, 俊幸

---

CITATION:

後藤, 俊幸. 乱流場の確率密度関数と構造(流体力学におけるトポロジーの問題). 数理解析研究所講究録 1992, 817: 149-167

ISSUE DATE:

1992-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83114>

RIGHT:

## 乱流場の確率密度関数と構造

名工大 後藤 俊幸

Toshiyuki Gotoh

### 1. 乱流における統計的性質

乱流というときにすぐに想像されるのは、乱れた川の流れや大気の流れあるいは洗濯機の中の流れであろう。このとき乱れとは速度場や圧力の時間的空間的変動をさす。流れは十分に乱れているので、一見するとこれらの物理量はガウス（正規）分布しているようにみえる。実際乱流中の 1 点で観測するとその速度の統計分布は ガウス分布に近いことが多くの実験や計算機シミュレーション（DNS）により確かめられている。しかし速度場の時間微分  $\frac{\partial u}{\partial t}$  や空間微分  $\frac{\partial u}{\partial x}$  あるいは距離  $r$  だけ離れた 2 点間の速度差  $\Delta u = u(x+r) - u(x)$  の統計分布はガウス分布からはずれている（図 1）。その形はいわば裾広がりのスカートの様な形をしており、平均からのはずれが小さい時にはガウス分布より尖っているし、はずれが大きい時にはガウス分布と比べて大きくなっている。これは大きい変動が通常の揺らぎ（ガウス分布）と比べてより頻ぱんに起こることを意味している。またこれらの物理量の時間的経過を追うと（図 2）、通常のガウス分布のときの時間経過と比べて特徴的なのは、変動が小さく静かなときが続く中で時折振幅が大きく激しい変動が現われることである。この現象は間欠性（intermittency）と呼ばれている。このことから速度場の微分や 2 点間の速度差の非ガウス分布は間欠性に結びつけて考えられる。では乱流中におけるこれらの物理量はどのような空間分布をしているのであろうか、またどのような力学過程が非ガウス分布をもたらしているのであろうか？

第一の疑問に答えるには乱流の流れ場の様子を具体的に見ることが必要である。このためには DNS から得られる  $\frac{\partial u}{\partial x}$  等の空間分布を可視化すれば良い。現在のところ得られている最大のレイノルズ数は  $R_\lambda = 202, N = 512^3$  程度であり<sup>1</sup>、Kolmogorov のエネルギー

スペクトル  $k^{-5/3}$  が観測される慣性領域は 1 けた程度で大きくはないが、それでもながれの空間構造をつかまえるのには十分役にたつと考えられる。図 3 は Vincent と Meneguzzi<sup>2</sup> による一様等方な定常乱流 ( $R_\lambda = 150, N = 240^3$ ) の DNS から得られたもので、渦度  $\omega$  の与えられたしきい値を越える領域が示してある。渦度の小さい部分はほぼ空間の大部分を占め、一方大きい部分はかなり小さな領域を占めており、しかも短い管状の形をしていることがみてとれる。やや詳しい観察によると、渦度の占める領域の特徴的な形は、 $\omega > \sqrt{2}\omega_{rms}$  の時 管、 $\omega \sim \sqrt{2}\omega_{rms}$  の時 面、 $\omega \leq \omega_{rms}$  の時 特徴的な形なしという報告がなされている。<sup>3</sup> いま乱流が一様等方であるとしよう。乱流の単位質量当りの散逸エネルギー率  $\epsilon$  はストレインテンソル  $s_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  の自乗に比例し、さらにごく大まかに言えば、渦度の自乗に比例するから、渦度の大きい領域では  $\epsilon$  も大きいということになる。しかしこの  $\epsilon$  は正しくは局所的な量  $\epsilon(\mathbf{x})$  であり、高渦度領域から乱流全体の  $\epsilon_{total}$  への寄与はそれほど大きくはない。図 4 には与えられたしきい値を越える  $s_{ij}$  の領域からの  $\epsilon$  への寄与と全体積における  $\epsilon_{total}$  との割合である。ほとんどのエネルギー散逸は低いストレイン（渦度）を持った領域（バックグラウンド）で起きていることがわかる。

いま大まかに大きな渦度の領域が大きなストレインの領域ひいては強いエネルギー散逸の領域に結びついていることを述べた。しかしこれらは統計的な意味でのことであって、個々の領域ではどれほど渦度とストレインが関係しているのかはあまり明らかではない。そこで最近渦度ベクトルとストレインテンソルの主軸方向との関係が調べられてきている。<sup>3</sup> いま  $S_{ij}$  の固有値を大きい順に  $\alpha > \beta > \gamma$  とし、流体は非圧縮とすると  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  が成り立つ。これから  $\alpha > 0, \gamma < 0$  であることはすぐにわかるが、 $\beta$  については個々の流れの状況により符号が変化する。DNS からのデータによると、 $s \equiv (s_{ij}s_{ij})^{1/2} < s_{rms}$  の領域では  $\beta$  はほぼ等しい割合で正負をとり、 $s > 2s_{rms}$  の領域ではほとんど正となる様である。<sup>3</sup> すなわちストレインが強いところでは流体の微小な部分が 2 方向で引きのばされ 1 方向に縮む様な変形を受けている。さらに渦度ベクトルは  $s$  の強いところではかなり高い確率でストレインの  $\beta$  軸に平行になっていることも同じデータからわかっている。このよう

な運動学的な条件をみたす流れ場の構造には非常に多様なものが考えられるが、ひとつの例として Burgers Vortex とよばれるものが考えられる (図5)。<sup>4</sup> いま  $z$  軸方向に強い渦度  $\omega_0$  を持った渦管があり、また  $r-z$  平面には  $(v_r, v_z) = (\beta z, -\frac{1}{2}\gamma r)$  のせん断流があるとす。このときの局所的なストレインテンソルの主軸は強い渦度により  $\alpha$  が  $\theta$  方向に、 $\beta$  が  $z$  方向にそして  $\gamma$  が  $r$  方向に向いており、また  $v_\theta = \frac{2\nu\omega_0}{\gamma r}\{1 - \exp(-\gamma r^2/4\nu)\}$ ,  $\omega = \omega_0 \exp(-\gamma r^2/4\nu)$  で与えられる局所的な速度及び渦度分布を持つ。 $\beta$  方向の流れによる渦管は引き延ばしと渦管の表面での粘性によるエネルギー散逸が釣りあって、この渦管がある比較的長い時間のあいだその形を維持していると考え、図3の様な渦管の構造が理解できるように思われる。一方ストレインがさほど大きくないところではこのような渦度とストレインの主軸方向との並び具合はそれほど明瞭ではない。従って上に述べたはっきりとした構造と呼べるものは不明瞭である。

以上述べてきたことから、渦度やストレインフィールドの大きな領域にはある流れの構造らしきものがあり、これが確率分布関数のガウス分布からのずれ (intermittency) に対応していることがわかった。しかしこれらの構造や大きな渦度場やストレインがどの様にして生成されるのか、またどの様にしてガウス分布からのずれを引き起こすのかはまだ理解されていない。この動力学を理解することが必要である。次章では最近発展してきた理論について述べる。

## 2. 確率分布関数の Mapping closure

乱流の速度勾配  $s = \frac{\partial u}{\partial y}$  を例にとり、この確率分布関数  $P(s)$  をどのようにして求めるかを考えよう。 $s$  に対応してあらかじめその統計的性質がわかっている reference field  $s_0$  をとる。<sup>5,6</sup> 通常  $s_0$  は統計的に一様でかつある与えられたスペクトルをもつ多重結合ガウス分布に従うとする。いま求めたい乱流場  $s$  と reference field  $s_0$  との間に1対1の関数関係  $s = X(s_0)$  が見いだされたとすると、 $s$  の1点分布関数  $P(s)$  は  $s_0$  の1点分布関数  $P_0(s_0)$

(ガウス分布) と

$$P(s)ds = P_0(s_0) \frac{1}{\frac{dX}{ds_0}} ds, \quad (1)$$

の関係で結ばれる。但し 1 対 1 対応より  $\frac{dX}{ds_0} > 0$  である。この関係からわかるように  $s_0$  から  $s$  への写像 (mapping) が非線形であるときには非ガウス分布が作られる。この基本的な考えを 3 次元の非圧縮乱流の  $P(s)$  に応用してみよう。<sup>6</sup> 渦度方程式は

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 \omega_i$$

であるがおおまかには  $s \sim \omega_i \sim \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  とおいて

$$\frac{Ds}{Dt} = s^2 + \nu \nabla^2 s \quad (2)$$

として良いであろう。さらに始め微小な距離  $\Delta z$  だけはなれていた 2 つの流体粒子がのちに  $\Delta x$  離れたとするとに着目すると  $s$  は

$$\begin{aligned} s &= X(s_0, t) = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} \frac{\Delta u}{\Delta z} \\ &= J(s_0, t) s_0 \end{aligned} \quad (3)$$

と表わされるであろう。ここに  $J(s_0, t) = \Delta z / \Delta x$  は流体粒子の引き延ばしや縮みを表わす。(3) 式を (2) に代入し  $\nabla_x^2 \rightarrow J^2 \nabla_z^2 \rightarrow k_d^2 J^2$  とおいてやると、 $J$  の従う式は

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J^2 |s_0| - \nu k_d^2 J^3 \quad (4)$$

となる。1 章で見てきたように  $s_0 \gg \langle s_0^2 \rangle^{1/2}$  の領域ではストレッチングと粘性による散逸が釣りあってすぐに準定常状態が達せられると考えられるから、そのとき

$$J \sim \frac{|s_0|}{\nu k_d^2}, \quad |s| \sim \frac{s_0^2}{\nu k_d^2} \quad (5)$$

となる。いま乱流のほとんどの部分はガウスのバックグラウンドをもち、その一部分が時間とともに乱流運動によって引き延ばしや縮みを受けて大きな  $s$  が作られるとすると、 $s_0$

の分布  $P_0(s_0)$  はガウス分布にとることができる。(1) の関係式に (5) を代入することにより

$$P(s) = \left( \frac{\nu k_d^2}{8\pi \langle s_0^2 \rangle |s|} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\nu k_d^2 |s|}{2 \langle s_0^2 \rangle}\right) \quad (6)$$

となり指数的な分布関数を得る。この分布は DNS や実験において得られる分布関数の形にかなり似ている。方程式 (5) を数値的に解き Vincent と Meneguzzi<sup>2</sup> の DNS の結果との比較をしたのが図 5 である。かなりおおまかな近似ではあるが分布関数の特徴を良くとらえていることが見てとれる。

以上の理論はきわめて単純なものであるが、さらにより念のいったモデル理論ではより多くの実験結果と一致する結論に導くことが示されている。<sup>7,8</sup> しかしこれらは現象論的な理論であるので任意性が含まれたり実際の動力学方程式との結びつきは薄い。そこで本来の流体方程式に基づいた理論が望まれる。次章では基礎方程式により忠実で構成的な理論を 1 次元バーガス方程式について考察する。

### 3. Burgers 乱流における Mapping closure

Burgers 方程式と速度勾配  $\xi \equiv u_x$  の従う方程式は

$$Du/Dt = \nu u_{xx} \quad (7)$$

$$D\xi/Dt = -\xi^2 + \nu \xi_{xx}, \quad (8)$$

である。ここに  $D/Dt = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$  はラグランジュ微分  $\nu$  は動粘性係数、 $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  である。場は統計的に一様であり初期状態はあるエネルギー Spektrum が与えられた多重結合ガウス分布に従っているとしよう。この時、方程式 (7) と (8) に従う場の確率分布関数  $P(u, \xi)$  の発展方程式を求めることがここでの問題であるが、経験的に速度場の 1 点分布関数はガウス分布に近いことが知られているので、さらに問題を制限して  $Q(\xi)$  について考えることにする。すなわち  $u$  と  $\xi$  が統計的に独立とみなして

$$P(u, \xi) = P(u)Q(\xi) \quad (9)$$

とし  $Q(\xi)$  の発展方程式を導く。リウビル方程式は

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \left[ \frac{D\xi}{Dt} \right]_{C:\xi} Q \right) = \xi Q, \quad (10)$$

であり、右辺の項は圧縮性による。 $[ ]_{C:\xi}$  は  $\xi$  を与えたときの条件付きアンサンブル平均である。方程式 (8) からわかる様に  $\left[ \frac{D\xi}{Dt} \right]_{C:\xi}$  は  $\xi(x)$  の空間微分の項を含むので、BBGKY 方程式の場合と同様方程式系は閉じていない。そこで既知の統計性を持った reference field から実際の場合への写像 (mapping) を考え、この方程式系を閉じる (closure) 近似方法を考える。<sup>6,9</sup> Reference field を  $u_0$  とし 2 章でやったようにこの場合は統計的に一様でありかつ多重結合ガウス分布に従うとする。この場から実際の場合  $u$  への変換 (振幅) とともにその場の独立変数も  $z$  から  $x$  へ変換されたとする。これはなめらかな場  $u_0(z)$  からショックを伴う様な実際の  $u(x)$  を生成するために必要である。そこで次の形の mapping を採用する。

$$u(x, t) = X(u_0(z), t) = r(t)u_0(z), \quad (11)$$

$$dz/dx = J(\xi_0(z), t). \quad (12)$$

$r(t)$  は粘性による散逸を表わし、 $J$  は引き延ばしや縮みが  $\xi_0$  のみによることを仮定している。もちろん実際の場合が (11) と (12) だけで reference field から作られるとするのは、 $\xi$  の 1 点確率分布関数に関する統計的な意味での近似である。従って高次の分布関数などについてはどうなるかわからない。さらに注意すべき点は、 $u(x)$  の初期条件がガウス分布であることと reference field がガウス分布であることは独立であり、実際の場合の初期分布は、mapping  $X(u_0, t=0)$  が  $u_0$  に関して単調増加関数であればどのようなものであってもよい。一方 reference field をガウス分布にとるのは mapping を用いて  $[ ]_{C:\xi}$  の評価を得ることができるいちばん簡単なものであるという理由からである。

方程式 (11) は  $u_0$  に関して線形であり従って  $u$  の分布は常にガウス分布である。(11) と (12) から

$$\xi = \xi_0 J(u_0, \xi_0) \partial X / \partial u_0 \equiv Y(u_0, \xi_0) \quad (13)$$

を得る。これより分布関数は

$$Q(\xi, t) = Q_0(\xi_0, t) \left[ \frac{\partial Y}{\partial \xi_0} \right]^{-1} \frac{N(t)}{J(\xi_0, t)} \quad (14)$$

$$\frac{1}{N(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_0(\xi_0, t)}{J(\xi_0, t)} d\xi_0 \quad (14)$$

と表わされる。 $N(t)$  は規格化常数であり  $\frac{\partial Y}{\partial \xi_0}$  は  $\xi_0$  から  $\xi$  への変換のヤコビアン、そして  $1/J$  は空間が伸び縮みすることによる分布関数の測度の変化を考慮するためである。(即ち  $\xi = \xi_0$  であっても、 $z$  が  $x$  に対して伸び縮みすれば単位長さ当りの点の数に変化する。)  $r(t)$  はエネルギー方程式から

$$dr/dt = -r\nu \langle \xi^2 \rangle / \langle u^2 \rangle, \quad (15)$$

$$\langle \xi^2 \rangle = Nr^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi_0^2 J(\xi_0) Q(\xi_0) d\xi_0$$

と決定される。また  $J$  は mapping により得られる  $Q$  がリュウビル方程式の解に等しい (1 点分布関数が等しい) と要請する事により得られる。まず (14) を時間で微分して

$$\frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial Y(\xi_0, t)}{\partial t} Q(\xi, t) \right) = \alpha(\xi, t) Q(\xi, t), \quad (16)$$

$$\alpha(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{N}{J} \right).$$

そしてこの式から (10) を両辺差し引くことにより、

$$\frac{\partial Y(\xi_0, t)}{\partial t} = -\xi^2 + \nu [\xi_{xx}]_{C:\xi} + \frac{1}{Q(\xi, t)} \int_{-\infty}^{\xi} [\alpha(\xi', t) - \xi'] Q(\xi', t) d\xi', \quad (17)$$

を得る。積分常数は  $\xi = \pm\infty$  で有限になるようにとってあり方程式 (8) を使った。さらに (13) と (15) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} = & -r\xi_0 J^2 + \frac{1}{r\xi_0 Q(\xi, t)} \int_{-\infty}^{\xi} [\alpha(\xi', t) - \xi'] Q(\xi', t) d\xi' \\ & + \nu \frac{[\xi_{xx}]_{C:\xi}}{r\xi_0} + \nu J \frac{\langle \xi^2 \rangle}{\langle u^2 \rangle} \end{aligned} \quad (18)$$



右辺には  $[\xi_{xx}]_{C:\xi}$  を含んでいる。これは (13) 式の  $x$  に関する微分を  $z$  微分で表わしさらに reference field が多重結合ガウス分布であることを使うことにより決定される。まず

$$\xi_x = r\xi_{0z} \left( J^2 + \frac{\xi_0}{2} \frac{\partial J^2}{\partial \xi_0} \right), \quad (19)$$

$$\xi_{xx} = r\xi_{0zz} J^2 \left( J + \xi_0 \frac{\partial J}{\partial \xi_0} \right) + r(\xi_{0z})^2 \left( \frac{\xi_0}{2} J \frac{\partial^2 J^2}{\partial \xi_0^2} + \frac{\partial J^3}{\partial \xi_0} \right). \quad (20)$$

となる。 $\xi_0(z)$  は統計的に一様であるから  $\langle \xi_0 \xi_{0z} \rangle = \langle \xi_{0z} \xi_{0zz} \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_0 \xi_{0zz} \rangle = -\langle (\xi_{0z})^2 \rangle$  (アンサンブル平均を空間平均に置き換えれば部分積分を用いてたやすく示せる) であり、また  $\xi_0(z)$  はガウス分布であることを考慮に入れると  $\xi_0(z)$  は  $\xi_0$  と  $\xi_{0zz}$  に統計的に独立であることがわかる。さらに  $\xi_0$  が Gaussian であることから

$$\xi_{0zz} = -k_d^2 \xi_0 + w \quad (21)$$

であることがわかる。ここに  $k_d^2 = C_2 / \langle \xi_0^2 \rangle$ ,  $C_2 = \langle (\xi_{0z})^2 \rangle$  であり、 $w$  は  $z$  の各点で  $\xi_0$  と  $\xi_{0z}$  に統計的に独立であってガウス分布に従う確率変数である。いま  $\xi(x)$  と  $\xi_0(z)$  は 1 対 1 対応であるから、 $[\xi_{xx}]_{C:\xi}$  は  $[\xi_{0zz}]_{C:\xi_0}$  に 1 対 1 に対応がつく。(13),(20),(21) から

$$[\xi_{xx}]_{C:\xi} = -r\xi_0 k_d^2 J^2 \left( J + \xi_0 \frac{\partial J}{\partial \xi_0} \right) + rC_2 \left( \frac{\partial J^3}{\partial \xi_0} + \frac{\xi_0}{2} J \frac{\partial^2 J^2}{\partial \xi_0^2} \right). \quad (22)$$

と表わせる。(13),(14),(15),(18),(22) が 1 点分布関数の完結した近似方程式を与える。

次に分布関数の漸近的な振舞いについて見てみよう。最初に  $\xi_0 < 0$ ,  $|\xi_0| \gg \langle \xi_0^2 \rangle^{1/2}$  のときには、縮みによる変形 (ショックの形成) と粘性によるエネルギー散逸がバランスしてすぐに準定常状態に移行すると考えられる。即ち

$$r|\xi_0| J^2 \approx \nu k_d^2 J^2 \left( J + \xi_0 \frac{\partial J}{\partial \xi_0} \right) \quad \left( \xi_0 < 0, \quad \xi_0^2 \gg \frac{C_1}{\mathcal{R}_0^2} \right). \quad (23)$$

これより

$$J(\xi_0, t) \approx \frac{r(t)|\xi_0|}{2\nu k_d^2} \quad \left( \xi_0 < 0, \quad \xi_0^2 \gg \frac{C_1}{\mathcal{R}_0^2} \right). \quad (24)$$

そして分布関数は

$$Q(\xi, t) \approx \frac{N(t)}{\sqrt{2\pi C_1}} \frac{\nu k_d^2}{r|\xi|} \exp\left(-\frac{\nu k_d^2 |\xi|}{r^2 C_1}\right) \quad \left(\xi < 0, \quad |\xi| \gg \frac{r^2 C_1}{\nu k_d^2 \mathcal{R}_0^2}\right). \quad (25)$$

即ち指数関数になる。この点は1章に述べた Burgers vortex と比較するとほぼ同様なメカニズムが働いていることがわかる。一方  $\xi_0 > 0, |\xi_0| \gg \langle \xi_0^2 \rangle^{1/2}$  のときには、粘性項は無視できておおよそ

$$\partial \xi / \partial t \approx -\xi^2 \quad (26)$$

であり

$$\xi \approx \frac{\xi_0}{1 + \xi_0 t}, \quad J(\xi_0, t) \approx \frac{1}{r(t)(1 + \xi_0 t)} \quad \left(\xi_0 \gg \frac{C_1^{1/2}}{\mathcal{R}_0}\right) \quad (27)$$

となって分布関数は

$$Q(\xi, t) \approx \frac{N(t)r(t)}{\sqrt{2\pi C_1}(1 - \xi t)^3} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2C_1(1 - \xi t)^2}\right) \quad \left(\xi < t^{-1}, \quad \xi_0 \gg \frac{C_1^{1/2}}{\mathcal{R}_0}\right) \quad (28)$$

と表わせる。指数部に  $(1 - \xi t)^3$  があることから  $\xi > 1/t$  に対しては急速に小さくなることがわかる。また分布関数の最大値は  $1/t$  の近くにあり、このことはバーガース方程式の解がショックの近くを除いてほぼ  $1/t$  の傾きを持つことに対応している。

#### 4. Mapping closure によるエネルギースペクトルの計算

これまで述べてきた Mapping Closure は1点における統計分布の近似理論であるにもかかわらず、多点における統計量、特にエネルギースペクトルを計算することができる。それには局所的な座標の関係式(12)を積分して大域的な座標を構成すればよい。即ち

$$x = f(z, t) = \int_0^z \frac{dz'}{J(\xi_0(z'), t)} \quad (29)$$

ここで  $(z = 0) \rightarrow (x = 0)$  を使った。  $J > 0$  であるから、写像  $f$  は1対1対応であり、従って逆関数  $z = f^{-1}(x, t)$  が存在する。また  $\xi_0(z)$  が確率変数であるから  $f$  や  $f^{-1}$  もランダムに変化する。この写像を用いると

$$u(x, t) = X(u_0(f^{-1}(x, t)), t) = r(t)u_0(f^{-1}(x, t), t), \quad (30a)$$

$$\xi(x, t) \equiv Y(\xi_0(f^{-1}(x, t)), t) = r(t)\xi_0(f^{-1}(x, t))J(\xi_0(f^{-1}(x, t)), t), \quad (30b)$$

と表わすことができる。また  $u(x, t)$  や  $\xi(x, t)$  は統計的に一様であるからその相関関数は座標の差のみの関数である。

$$\langle \xi(x, t) \xi(x', t) \rangle = \Phi(x - x', t) \quad (31)$$

Mapping(30) を用いると

$$\Phi(x, t) = r^2(t) \langle \xi_0(f^{-1}(x, t), t) J(f^{-1}(x, t), t) \cdot \xi_0(0, t) J(\xi_0(0), t) \rangle \quad (32)$$

と表わされ、そのフーリエ変換をとり  $k^2$  で割れば

$$\begin{aligned} E(k, t) &= \frac{1}{4\pi k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, t) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{r^2(t)}{4\pi k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi_0(f^{-1}(x, t), t) \xi_0(0, t) J(\xi_0(f^{-1}(x, t)), t) e^{-ikf(z, t)} \rangle dz. \end{aligned} \quad (33)$$

と表わされる（速度場でスペクトルを表わすこともできるが、数値的な精度等の観点から速度勾配にたいする表現を用いた）。式(33)において平均は  $\xi_0(z)$  のアンサンブルにわたりとられ、積分は凡関数積分を意味する。

非常に大きいレイノルズ数における inertial range スペクトルは、

$$\langle \xi(k, t) \xi(-k, t) \rangle \sim \frac{n(t)}{2\pi} \langle \{\Delta u(t)\}^2 \rangle \quad (34)$$

となる。右辺の  $n(t)$  は  $x$  空間での単位長さ当りのショックの数（ショック密度）で、 $\Delta u(t)$  はショックをはさんでの速度のとびでありいわば特異点の強さである。さらに  $J$  にたいして  $J(\xi_0, t) \approx \frac{1}{r(t)(1+\xi_0 t)}$  の形を仮定する事により、

$$E(k, t) = k^{-2} \langle \xi(k, t) \xi(-k, t) \rangle \sim \frac{1}{k_d} \frac{1}{k^2 t^2}, \quad t \gg \langle \xi_0^2 \rangle^{-1/2} \quad (35)$$

となる<sup>10</sup>。ここに  $k_d^2 \equiv \langle \xi_0^2 \rangle / \langle u_0^2 \rangle$  である。

## 5. Mapping closure の数値積分と直接シミュレーションとの比較

Mapping closure の方程式 (13),(14),(15),(18),(22) を数値的に積分しバーガス方程式の直接シミュレーション (DNS) と比較をおこなった。<sup>9</sup> 初期エネルギースペクトルは

$$E(k, 0) = Ck^2 \exp(-(k/k_0)^2) \quad (36)$$

をとりレイノルズ数  $\mathcal{R}_0 = u_0/\nu k_0$  は 5 と 15 である。方程式 (18) は右辺に時間微分項を含んでいるので各時間ステップで反復計算を行なった。さらに積分項と  $\partial J^3/\partial \xi_0$  の項は  $1/\xi_0$  の特異性をもつがこれらは正確にキャンセルする様になっている。その結果得られた図 6 に示すように  $J$  はなめらかな関数である。また Mapping closure によるスペクトルの計算では (33) よりむしろ (30b) を計算しそのフーリエ変換を行なった。この方が収束が速い。格子点数を  $2^{10}$  にとり 1000 のアンサンブルについて平均をとった。DNS は格子点数  $N = 2^{17}$  であり  $k_0 = 0.1(\mathcal{R}_0 = 5), 0.02(\mathcal{R}_0 = 15)$  であるので 1 つの初期値についておむね波長  $2\pi/k_0$  で繰り返すランダムな波形がほぼ 2000 及び 400 含まれている。そして初期値のアンサンブルは 20 にとり平均をとった。

図 7 - 1.0 は分布関数  $Q(\xi, 0)$  の時間発展を示したものであり参照のために正規分布のカーブも示してある。理論とシミュレーションがよく一致しているのがわかる。負の大きな速度勾配については指数関数に近く、分布のピークは時間とともに鋭くなっている。さらに分布の最大値より右にある  $\xi$  については  $Q$  は急速に小さくなっており、これらの特徴はさきに述べた漸近解析の結果とも一致している。図 1 1 と 1 2 は  $\mathcal{R}_0 = 5, 15$  におけるエネルギースペクトルを  $tv_0k_0 = 0, 1, 2$  において比較したものである。きわめてよい一致が見られる。レイノルズ数が低いので  $k^{-2}$  のスペクトルは見られない。図 1 3 - 2 0 は  $\mathcal{R}_0 = 5, 15$  の場合における 1 点における統計量の比較である。実線は Mapping closure による分布関数  $Q$  を用いて計算したものであり、ダイヤモンドの記号は Mapping closure によるエネルギースペクトルから計算したもの、そしてプラスの記号は DNS によるものである。全般的により一致が見られる。 $tv_0k_0 = 0.5$  で DNS と理論による  $\xi$  の skewness 等にくい違いが見られるが、それにもかかわらず  $Q(\xi, 0.5/v_0k_0)$  は DNS によるものとよく一致している。この時刻は振幅  $v_0$  の波が  $1/4k_0$  だけ進んで大きなショックが形成される時であるが、その理由

は今のところ明かではない。また  $\langle \xi_{xx}^2 \rangle / \langle \xi^2 \rangle$  のグラフは  $[\xi_{xx}]_{C:\xi}$  の Mapping closure による近似の程度を表わしている。  $tv_0k_0 = 0.5$  付近で closure は小さい値を示すが全体的には満足のゆくものである。

## 6. まとめ

非圧縮で一様な 3 次元乱流においては、速度差や速度勾配がガウス分布に近いバックグラウンドをもった部分の中に振幅の大きい領域があり、これが分布関数を指数型に近いものになっていることを見てきた。この振幅の大きい領域は空間的には渦管や面の様な形をしているらしい。このように空間構造と分布関数の関係が見えてくる一方、なぜそのような構造や強い速度勾配を持った領域が生み出されるのかということを理解するには、基礎方程式に基づいた理論が望まれる。そこで 1 次元バーガス方程式を例にとり、Mapping closure の理論を展開してきた。それによれば reference field として多重結合ガウス分布に従う統計的に一様な場をとり、ここから実際の場合への非線形変換を考えることによりその分布関数の時間発展を近似する事ができる。この方法は非摂動論的であり強い非線形性も扱える。実際、図 7-10 に見るように  $Q$  はガウス分布から大きくずれているのでこれを摂動により扱うのは無理がある。

ここで述べた Mapping closure は初期エネルギースペクトルが (36) で与えられる様な、いわば線形方程式の自己相似的なスペクトルについてのみの結果である。この限りにおいては理論はよく DNS とあっているといえるがその他の初期エネルギースペクトルについては今後さらに解析が必要である。また (18) 式の最後の項は分母に  $\langle u^2 \rangle$  を含んでいるためガリレイ変換にたいして不変ではない。従って初期スペクトルが幅広い分布を持つような場合には、この項は小さく見積られることになり従って DNS との比較はさほどよくないことが予想される。しかしこのガリレイ不変性の欠如は DIA が Kolmogorov の  $k^{-5/3}$  スペクトルではなく  $k^{-3/2}$  を与えるといった様な質的なものではなく、定量的な意味でややよくないということである。ガリレイ不変性を持たせる一つの方法は、時間に依存する reference field を用いることである。詳しくは文献 9 を参照されたい。また十分時間がたった後の、多くの

ショックはみんな融合してごく少数しかショックが存在しない状況ではどれほど理論が実際とあうのかわかってはいない。さらに初期条件にガウス分布を用いたがその他の分布についても調べる必要がある。これらは分布関数の普遍性について関わる問題であり今後研究を行うことが必要である。

#### 参考文献

1. Shiyi Chen, Gary D.Doolen, Robert H.Kraichnan and Zhensu She, "On statistical correlations between velocity increments and locally-averaged dissipation in homogeneous turbulence," (1992) preprint.
2. A.Vincent and M.Meneguzzi, "The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence," J. Fluid Mech. **225**, 1 (1991).
3. Zhensu She, Eric Jackson and Steven Orszag, "Structure and dynamics of homogeneous turbulence: models and simulations," Proc.E.Soc.Lond. **A 434**, 101 (1991).
4. S.Kida and M.Takaoka, "渦度の凍結運動と渦のつながりかえ," RIMS, **767**, 66 (1991).
5. H. Chen, S. Chen and R. H. Kraichnan, "Probability distribution of a stochastically advected scalar field," Phys. Rev. Lett. **63**, 2657 (1989).
6. R. H. Kraichnan, "Models of intermittency in hydrodynamic turbulence," Phys. Rev. Lett. **65**, 575 (1990).
7. Shensu She, "Physical model of intermittency in turbulence: Inertial-range non-Gaussian statistics," Phys. Rev. Lett. **66**, 1701 (1991).
8. Shensu She, "Physical model of intermittency in turbulence: Near -dissipation -range non-Gaussian statistics," Phys. Rev. Lett. **66**, 600 (1991).
9. T. Gotoh and R. H. Kraichnan, "Statistics of decaying Burgers turbulence," to appear in Phys.Fluids A(1992).
10. R. H. Kraichnan, "Lagrangian-history statistical theory for Burgers' equation," Phys. Fluids **11**, 265 (1968).

## 図の説明

Fig.1 軸対称ジェットにおける距離  $r$  離れた 2 点での速度差の分布関数  $R_\lambda = 536$ . 外側から  $r = 0.6, 7.7, 17.2, 0mm$ 。Anselmet et al. (1984) より.

Fig.2 左はガウスノイズ右は間欠的なノイズの模式図.

Fig.3 DNS によるあるしきい値を越える渦度の分布 ( $R_\lambda = 150$ ). Vincent and Meneguzzi(1991) より.

Fig.4 DNS による  $S_c / \langle S^2 \rangle$  以上のストレインが全体のエネルギー散逸に占める割合. Z.-S. She et al.(1990) より.

Fig.5 Burgers vortex.

Fig.6 関数  $J(\xi_0, t)$ ,  $\mathcal{R}_0 = 5$ . 上から順に  $tv_0k_0 = 0.5, 1, 1.5, 2.0$ .

Fig.7  $Q(\xi, t)$ ,  $tv_0k_0 = 0.5$ ,  $\mathcal{R}_0 = 5$ . 四角は DNS 実線は Mapping Closure.

Fig.8  $Q(\xi, t)$ ,  $tv_0k_0 = 1$ ,  $\mathcal{R}_0 = 5$ .

Fig.9  $Q(\xi, t)$ ,  $tv_0k_0 = 0.5$ ,  $\mathcal{R}_0 = 15$ .

Fig.10  $Q(\xi, t)$ ,  $tv_0k_0 = 2$ ,  $\mathcal{R}_0 = 15$ .

Fig.11 エネルギースペクトル,  $\mathcal{R}_0 = 5$ ,  $tv_0k_0 = 0, 1, 2$ . 実線 Mapping closure; 記号 DNS.

Fig.12 エネルギースペクトル,  $\mathcal{R}_0 = 15$ ,  $tv_0k_0 = 0, 1, 2$ .

Fig.13 エネルギー,  $\mathcal{R}_0 = 5$ .

Fig.14 エンストロフィー,  $\mathcal{R}_0 = 5$ .

Fig.15 Skewness,  $\mathcal{R}_0 = 5$ .

Fig.16  $\langle \xi_{xx}^2 \rangle / \langle \xi^2 \rangle$ ,  $\mathcal{R}_0 = 5$ .

Fig.17 エネルギー,  $\mathcal{R}_0 = 15$ .

Fig.18 エンストロフィー,  $\mathcal{R}_0 = 15$ .

Fig.19 Skewness,  $\mathcal{R}_0 = 15$ .

Fig.20  $\langle \xi_{xx}^2 \rangle / \langle \xi^2 \rangle$ ,  $\mathcal{R}_0 = 15$ .



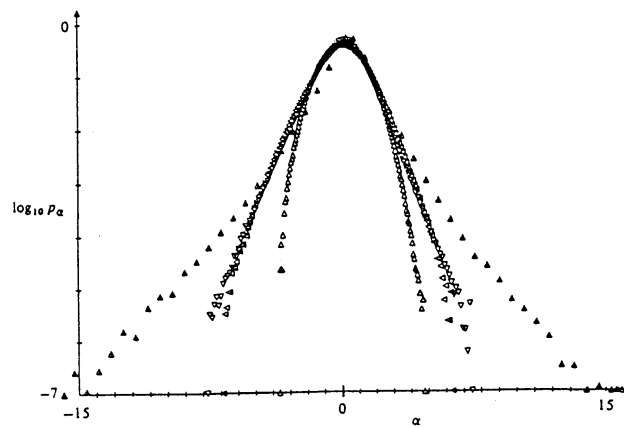


Fig. 1

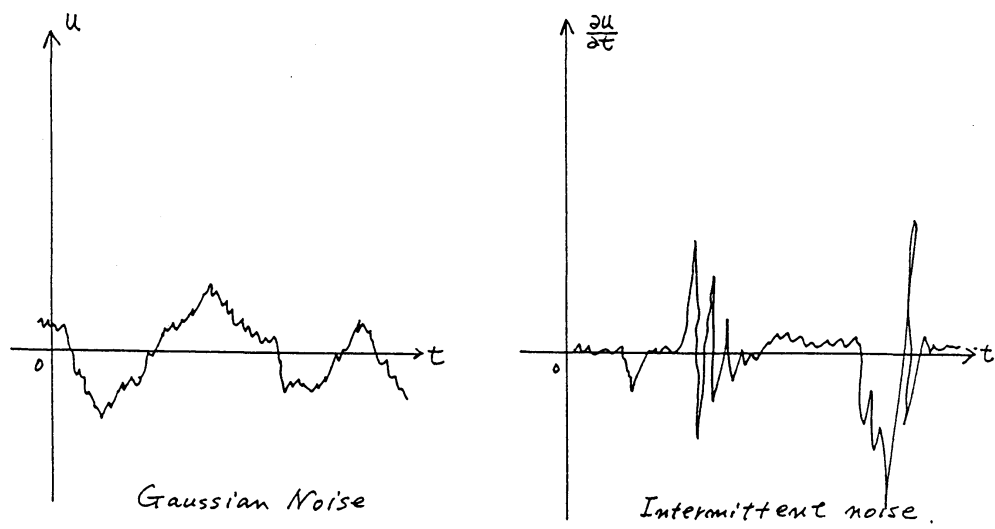


Fig. 2.

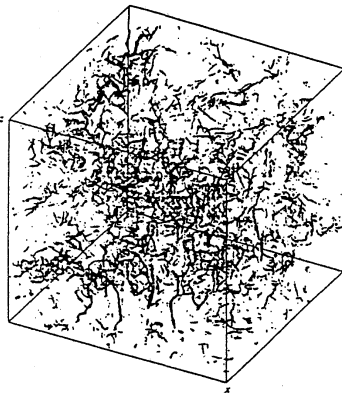


Fig. 3

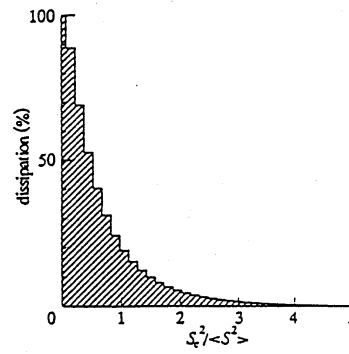
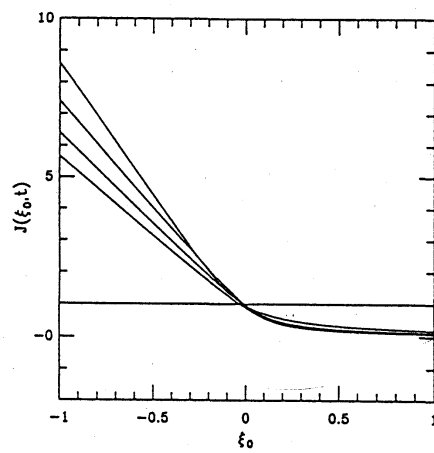
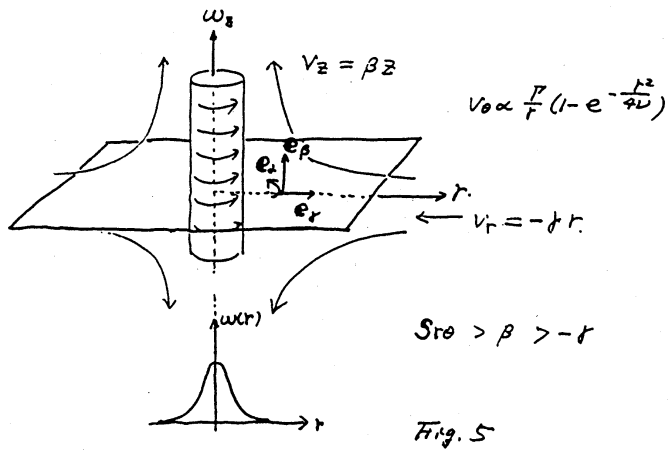


Fig. 4

Burgers vortex.



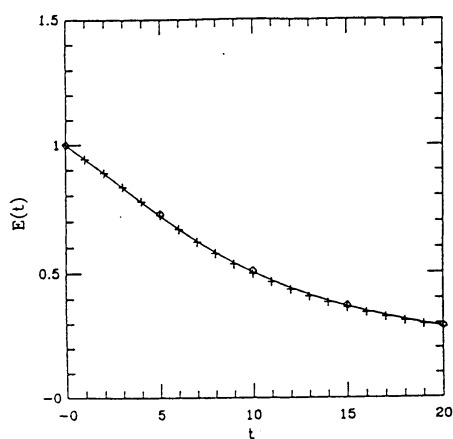


Fig. 13

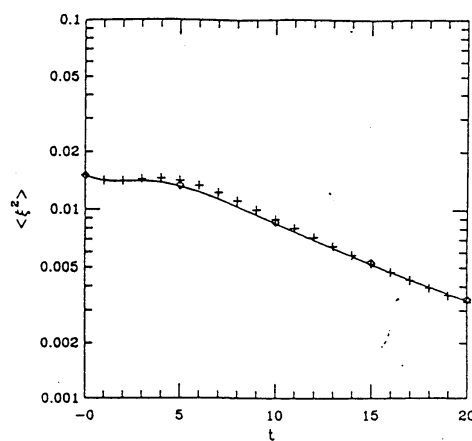


Fig. 14

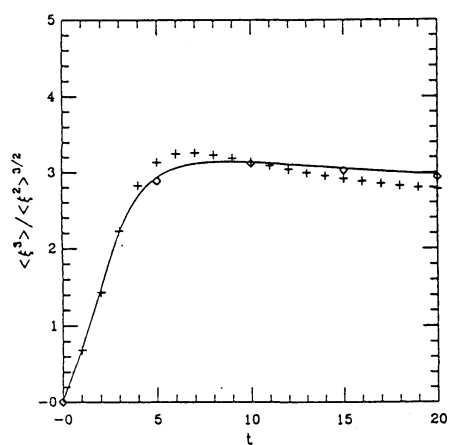


Fig. 15

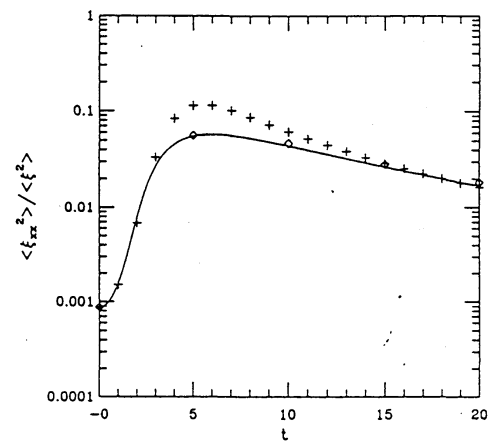


Fig. 16

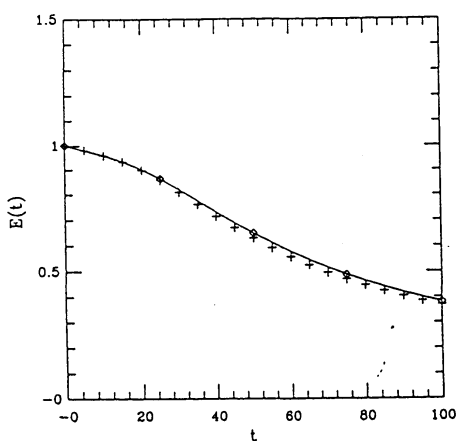


Fig. 17

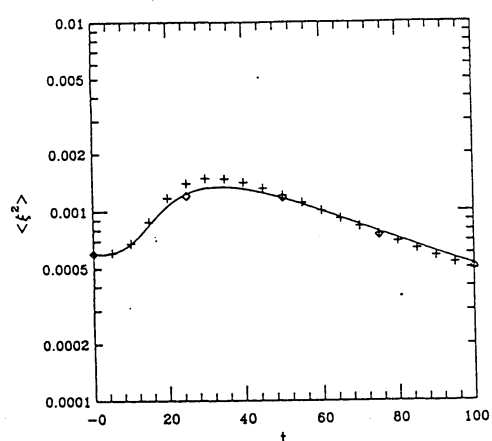


Fig. 18

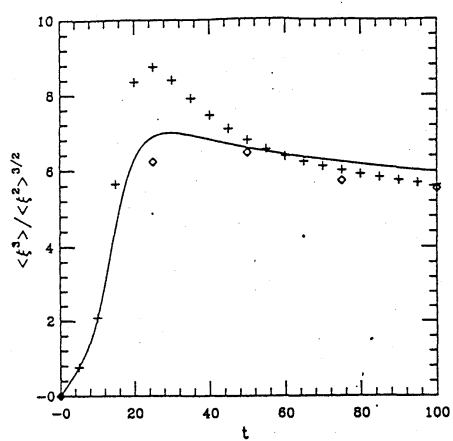


Fig. 19

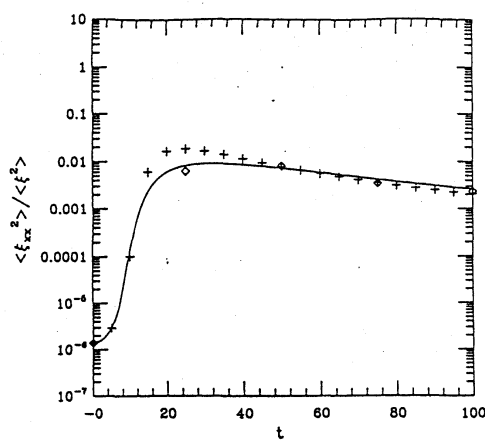


Fig. 20